Rozkład polarny

Szymon Pachla

Politechnika Krakowska

26 listopada 2022 r.

Szkic prezentacji

Sposoby zapisu liczb

Zapis liczb rzeczywistych

Zauważmy, że

$$\forall_{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} \; x = |x| \cdot sgn(x).$$

Sposoby zapisu liczb

Zapis liczb rzeczywistych

Zauważmy, że

$$\forall_{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} \ x = |x| \cdot sgn(x).$$

Zapis liczb zespolonych

Dla liczb zespolonych postaci $z = x + iy$ możemy zapisać, że

$$\forall_{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}} \ z = |z| \cdot e^{i\varphi},$$

gdzie $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$ oraz φ jest argumentem liczby z.

Sposoby zapisu liczb

Zapis liczb rzeczywistych

Zauważmy, że

$$\forall_{x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}} \; x = |x| \cdot sgn(x).$$

Zapis liczb zespolonych

Dla liczb zespolonych postaci $z = x + iy$ możemy zapisać, że

$$\forall_{z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}} \; z = |z| \cdot e^{i\varphi},$$

gdzie $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$ oraz φ jest argumentem liczby z.

Wniosek

Liczby zespolone, a w szczególności liczby rzeczywiste możemy przedstawić w postaci iloczynu czynnika skalującego oraz obrotu.

Sposoby zapisu macierzy

Istnienie analogicznego zapisu dla macierzy

Naturalnie nasuwa się pytanie, czy również macierze możemy przedstawiać w postaci iloczynu czynnika skalującego oraz obrotu. Jak się okazuje jest to możliwe, lecz wymaga pewnych szczególnych założeń dotyczących samej macierzy.

Potrzebne informacje

Macierz unitarna

Macierzą unitarną nazywamy macierz kwadratową o elementach zespolonych $U \in M_n(\mathbb{C})$ mającą własność

$$U^* \cdot U = U \cdot U^* = I_n,$$

gdzie I_n jest macierzą jednostkową oraz U^* jest sprzężeniem hermitowskim macierzy U, czyli złożeniem operacji transpozycji i sprzężenia zespolonego.
Zauważmy, że własność ta oznacza, iż macierz U posiada macierz odwrotną U^{-1} równą sprzężeniu hermitowskiemu jej samej, czyli $U^* = U^{-1}$.

Potrzebne informacje

Macierz unitarna

Macierzą unitarną nazywamy macierz kwadratową o elementach zespolonych $U \in M_n(\mathbb{C})$ mającą własność

$$U^* \cdot U = U \cdot U^* = I_n,$$

gdzie I_n jest macierzą jednostkową oraz U^* jest sprzężeniem hermitowskim macierzy U, czyli złożeniem operacji transpozycji i sprzężenia zespolonego.
Zauważmy, że własność ta oznacza, iż macierz U posiada macierz odwrotną U^{-1} równą sprzężeniu hermitowskiemu jej samej, czyli $U^* = U^{-1}$.

Macierz ortogonalna

Szczególnym przypadkiem macierzy unitarnej jest macierz ortogonalna będąca macierzą kwadratową o elementach rzeczywistych $A \in M_n(\mathbb{R})$ mającą własność

$$A^T \cdot A = A \cdot A^T = I_n,$$

gdzie A^T oznacza macierz transponowaną macierzy A. Oznacza to, że macierz A posiada macierz odwrotną A^{-1} równą transpozycji jej samej, czyli $A^T = A^{-1}$.

Potrzebne informacje

Macierz hermitowska

Macierzą hermitowską nazywamy macierz kwadratową o elementach zespolonych $H \in M_n(\mathbb{C})$ równą swojemu sprzężeniu hermitowskiemu, czyli mającą własność

$$H = H^*.$$

Potrzebne informacje

Macierz hermitowska

Macierzą hermitowską nazywamy macierz kwadratową o elementach zespolonych $H \in M_n(\mathbb{C})$ równą swojemu sprzężeniu hermitowskiemu, czyli mającą własność

$$H = H^*.$$

Macierz symetryczna

Szczególnym przypadkiem macierzy hermitowskiej jest macierz symetryczna będąca macierzą kwadratową o elementach rzeczywistych $A \in M_n(\mathbb{R})$ mającą własność

$$A = A^T.$$

Potrzebne informacje

Macierz dodatnio półokreślona

Macierzą dodatnio półokreśloną nazywamy macierz hermitowską H mającą własność

$$\forall_{v \in \mathbb{C}^n} \; v^* \cdot H \cdot v \geqslant 0,$$

gdzie * oznacza sprzężenie hermitowskie. W powyższym zapisie wektor v traktujemy jako wektor kolumnowy.

Macierz dodatnio określona

Macierz dodatnio określoną możemy zdefiniować korzystając z powyższej definicji jako dodatnio półokreśloną macierz nieosobliwą.

Własności macierzy dodatnio półokreślonej

Wartości własne macierzy dodatnio półokreślonej

Niech $H \in M_n(\mathbb{C})$ będzie macierzą dodatnio półokreśloną. Wtedy wszystkie wartości własne macierzy są nieujemne.

Własności macierzy dodatnio półokreślonej

Wartości własne macierzy dodatnio półokreślonej

Niech $H \in M_n(\mathbb{C})$ będzie macierzą dodatnio półokreśloną. Wtedy wszystkie wartości własne macierzy są nieujemne.

Pierwiastek z macierzy dodatnio półokreślonej

Niech $H \in M_n(\mathbb{C})$ będzie macierzą dodatnio półokreśloną. Pierwiastkiem kwadratowym z macierzy H nazywamy jedyną, dodatnio półokreśloną macierz G spełniającą warunek

$$H = G^2.$$

Powyższy warunek możemy zapisać również następująco

$$\sqrt{H} = G.$$

Hermitowskość i dodatnio półokreśloność macierzy

Związek hermitowskości z dodatnio półokreślonością macierzy

Niech $A \in M_n(\mathbb{C})$. Wtedy

$$(A^* \cdot A)^* = A^* \cdot A,$$

co oznacza, że macierz $A^* \cdot A$ jest hermitowska.

Zauważmy następnie, że

$$\forall_{v \in \mathbb{C}^n} \;\; v^* \cdot A^* \cdot A \cdot v = (A \cdot v)^* \cdot A \cdot v = |A \cdot v|^2 \geqslant 0,$$

skąd wniosek, że macierz $A^* \cdot A$ jest dodatnio półokreślona.

Rozkład spektralny

Macierz normalna

Macierzą normalną nazywamy macierz kwadratową o elementach zespolonych $A \in M_n(\mathbb{C})$ mającą własność

$$A^* \cdot A = A \cdot A^*.$$

Przykładem macierzy normalnych są wszystkie macierze unitarne i hermitowskie.

Twierdzenie

Niech $A \in M_n(\mathbb{C})$ będzie macierzą normalną. Wtedy każdą taką macierz można zdiagonalizować, czyli zapisać w postaci

$$A = V \cdot Diag(\lambda_1, ..., \lambda_n) \cdot V^*,$$

gdzie V jest macierzą unitarną oraz $\lambda_1, ..., \lambda_n$ są wartościami własnymi macierzy A.

Faktoryzację tę nazywamy rozkładem spektralnym macierzy.

Wniosek z twierdzenia

Wniosek z twierdzenia

Niech $H \in M_n(\mathbb{C})$ będzie dodatnio półokreślona. Wtedy korzystając z rozkładu spektralnego oraz własności macierzy dodatnio półokreślonej możemy zapisać, że

$$\sqrt{H} = V \cdot Diag(\sqrt{\lambda_1}, ..., \sqrt{\lambda_n}) \cdot V^*.$$

Macierz jako iloczyn czynnika skalującego i obrotu

Rozkład polarny

Rozkładem polarnym nazywamy rozkład macierzy $A \in M_n(\mathbb{C})$ do postaci

$$A = U \cdot P,$$

gdzie U jest macierzą unitarną oraz P jest dodatnio półokreśloną macierzą hermitowską.

Macierz jako iloczyn czynnika skalującego i obrotu

Rozkład polarny

Rozkładem polarnym nazywamy rozkład macierzy $A \in M_n(\mathbb{C})$ do postaci

$$A = U \cdot P,$$

gdzie U jest macierzą unitarną oraz P jest dodatnio półokreśloną macierzą hermitowską.

Własności macierzy unitarnych i macierzy hermitowskich

Macierz unitarna U reprezentuje w tym przypadku obrót, a dodatnio półokreślona macierz hermitowska P skalowanie.

Własności rozkładu polarnego

Jednoznaczność rozkładu polarnego

- Jeśli A jest macierzą nieosobliwą to jej rozkład polarny istnieje i jest jedyny. Macierz P jest wtedy dodatnio określona.

Własności rozkładu polarnego

Jednoznaczność rozkładu polarnego

- Jeśli A jest macierzą nieosobliwą to jej rozkład polarny istnieje i jest jedyny. Macierz P jest wtedy dodatnio określona.
- Jeśli A jest macierzą osobliwą to jej rozkład polarny istnieje, lecz nie jest on jedyny. Istnieje wtedy dokładnie jedna dodatnio określona macierz P, jednak macierze U można dobierać różnie.

Rozkład polarny macierzy nieosobliwej

Rozkład polarny macierzy nieosobliwej

Niech A $\in M_n(\mathbb{C})$ będzie macierzą nieosobliwą. Zauważmy, że

$$
\begin{aligned}
A &= U \cdot P \\
A^* &= P^* \cdot U^* = P \cdot U^{-1} \\
A^* \cdot A &= P \cdot U^{-1} \cdot U \cdot P = P^2 \\
P &= \sqrt{A^* \cdot A}.
\end{aligned}
$$

Rozkład polarny macierzy nieosobliwej

Rozkład polarny macierzy nieosobliwej

Macierz P jest jednoznacznie wyznaczoną macierzą dodatnio określoną, a zatem jest również odwracalna stąd

$$U = A \cdot P^{-1}.$$

Pokażemy teraz, że macierz U jest unitarna

$$(A \cdot P^{-1})^* \cdot (A \cdot P^{-1})$$
$$\Updownarrow$$
$$(P^{-1})^* \cdot A^* \cdot A \cdot P^{-1}$$
$$\Updownarrow$$
$$(P^*)^{-1} \cdot P^2 \cdot P^{-1}$$
$$\Updownarrow$$
$$P^{-1} \cdot P^2 \cdot P^{-1} = I_n,$$

co kończy dowód.

Przykład

Znaleźć rozkład polarny macierzy A.

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{A}^* \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 13 \end{bmatrix}$$

Szukamy wartości własnych powstałej macierzy. Wielomianem charakterystycznym macierzy $A^* \cdot A$ jest

$$\mathrm{x}^2 - 17x + 16 = 0$$

$$\sigma(A^* \cdot A)=\{16,1\}$$

Szukamy wektorów własnych

$$\left(\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 13 \end{bmatrix} - 16 \cdot I_2\right) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -12 & 6 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2x=y

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ 2p \end{bmatrix}, \ \mathrm{p} \in \mathbb{R}$$

przyjmując p=1 otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 13 \end{bmatrix} - 1 \cdot I_2\right) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

x=-2y

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ -2p \end{bmatrix}, \text{ p} \in \mathbb{R}$$

przyjmując p=1 otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 13 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot Diag(16, 1) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sqrt{\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 13 \end{bmatrix}} = \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot Diag(4, 1) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sqrt{\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 13 \end{bmatrix}} = \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 6 & 17 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{P} = \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 6 & 17 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{20} \cdot \begin{bmatrix} 17 & -6 \\ -6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$U = \frac{1}{20} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 17 & -6 \\ -6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$U=\frac{1}{20}\cdot \begin{bmatrix} 16 & 12 \\ -12 & 16 \end{bmatrix}$$

Podstawiając wyznaczone wcześniej macierze otrzymujemy rozkład

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}=\frac{1}{100}\cdot \begin{bmatrix} 16 & 12 \\ -12 & 16 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 6 & 17 \end{bmatrix}.$$

Zastosowania

Zastosowania rozkładu polarnego

Rozkład polarny znajduje swoje zastosowanie w takich obszarach jak chociażby

- animacje komputerowe,
- mechanika ośrodków ciągłych,
- chirurgia.

Bibliografia

- A.Sołtysiak *Algebra liniowa* Wydawnictwo Naukowe UAM Poznań, 1999, wydanie II.
- Walter Rudin, *Analiza funkcjonalna* Wydawnictwo Naukowe PWN, 2001, s. 327–344.
- Nicholas J.Higham, Vanni Noferini *An algorithm to compute the polar decomposition of a 3×3 matrix*, czasopismo naukowe Springer 73:349–369, 2016.
- Garrett Buffington *Polar Decomposition of a Matrix*, `http://buzzard.ups.edu/courses/2014spring/420projects/math420-UPS-spring-2014-buffington-polar-decomposition.pdf`, dostęp: 15.11.2022.
- Adriaan van den Bos, *Parameter Estimation for Scientists and Engineers*, Wydawnictwo Wiley-Interscience, 2007, s.259-263.
- Wikipedia *Polar decomposition*, `https://en.wikipedia.org/wiki/Polar_decomposition`, dostęp: 15.11.2022.

Dziękuję za uwagę.