O różniczkowaniach algebr i ich klasyfikacji

Marcin Ból

Politechnika Krakowska
ul. Warszawska 24, Kraków

26–27 listopada 2022

Algebra nad ciałem

Definicja

Niech A będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{F}$. Jeżeli na przestrzeni A określono działanie mnożenia wektorów $* : A \times A \longrightarrow A$ spełniające warunki

- $\forall\, v, w, u \in A \qquad v * (w + u) = v * w + v * u,$
- $\forall\, v, w, u \in A \qquad (w + u) * v = w * v + u * v,$
- $\forall\, v, w \in A,\ \forall\, \lambda \in \mathbb{F} \qquad \lambda(v * w) = (\lambda v) * w = v * (\lambda w),$

to A nazywamy algebrą nad ciałem $\mathbb{F}$ ($\mathbb{F}$-algebrą).

Przykłady algebr nad ciałem

- $\mathbb{R}^3$ z iloczynem wektorowym (algebra niełączna nad $\mathbb{R}$),

Przykłady algebr nad ciałem

- $\mathbb{R}^3$ z iloczynem wektorowym (algebra niełączna nad $\mathbb{R}$),
- $\mathrm{C}[0,1]$ z działaniem punktowego mnożenia funkcji,

Przykłady algebr nad ciałem

- $\mathbb{R}^3$ z iloczynem wektorowym (algebra niełączna nad $\mathbb{R}$),
- $\mathrm{C}[0,1]$ z działaniem punktowego mnożenia funkcji,
- Algebra $\mathrm{M_n}(\mathbb{F})$ wszystkich macierzy kwadratowych stopnia n o współczynnikach z ciała $\mathbb{F}$.

Homomorfizmy algebr

Definicja

Niech A, B będą $\mathbb{F}$-algebrami. Odwzorowanie $\phi : A \longrightarrow B$ nazywamy homomorfizmem $\mathbb{F}$-algebr, jeżeli ϕ jest multiplikatywnym odwzorowaniem liniowym, czyli odwzorowaniem liniowym spełniającym warunek $\phi(x * y) = \phi(x) * \phi(y)$, dla dowolnych $x, y \in A$.

Homomorfizmy algebr

Definicja

Niech A, B będą $\mathbb{F}$-algebrami. Odwzorowanie $\phi : A \longrightarrow B$ nazywamy homomorfizmem $\mathbb{F}$-algebr, jeżeli ϕ jest multiplikatywnym odwzorowaniem liniowym, czyli odwzorowaniem liniowym spełniającym warunek $\phi(x * y) = \phi(x) * \phi(y)$, dla dowolnych $x, y \in A$.

Definicja

Endomorfizmem $\mathbb{F}$-algebry nazywamy jej homomorfizm w siebie.

Homomorfizmy algebr

Definicja

Niech A, B będą $\mathbb{F}$-algebrami. Odwzorowanie $\phi : A \longrightarrow B$ nazywamy homomorfizmem $\mathbb{F}$-algebr, jeżeli ϕ jest multiplikatywnym odwzorowaniem liniowym, czyli odwzorowaniem liniowym spełniającym warunek $\phi(x * y) = \phi(x) * \phi(y)$, dla dowolnych $x, y \in A$.

Definicja

Endomorfizmem $\mathbb{F}$-algebry nazywamy jej homomorfizm w siebie. Automofizmem $\mathbb{F}$-algebry nazywamy jej bijektywny endomorfizm.

Centralne algebry proste

Definicja

Niech A będzie $\mathbb{F}$-algebrą. Ideałem obustronnym algebry A nazywamy taką podprzestrzeń liniową B tej algebry, że

$$\forall x \in A \, \forall y \in B \quad x * y \in B \quad \text{oraz} \quad y * x \in B.$$

Centralne algebry proste

Definicja

Niech A będzie $\mathbb{F}$-algebrą. Ideałem obustronnym algebry A nazywamy taką podprzestrzeń liniową B tej algebry, że

$$\forall x \in A \forall y \in B \quad x * y \in B \quad \text{oraz} \quad y * x \in B.$$

Definicja

Łączną $\mathbb{F}$-algebrę A z jedynką nazywamy centralną algebrą prostą, jeżeli A nie posiada właściwych nietrywialnych ideałów obustronnych oraz $\mathrm{Z}(A) = \mathbb{F}$.

Twierdzenie Skolema–Noether

Twierdzenie Skolema–Noether

Niech B będzie centralną algebrą prostą nad ciałem $\mathbb{F}$ oraz niech A będzie $\mathbb{F}$-algebrą prostą. Załóżmy ponadto, że obie algebry są skończenie wymiarowe. Wtedy dla dowolnych homomorfizmów $\mathbb{F}$-algebr

$$f, g : A \longrightarrow B$$

istnieje element odwracalny $b \in B$ taki, że dla każdego $a \in A$

$$g(a) = b * f(a) * b^{-1}.$$

W szczególności każdy automorfizm centralnej algebry prostej jest automorfizmem wewnętrznym.

Różniczkowania pierścieni i algebr

Definicja

Odwzorowanie $\delta : A \longrightarrow A$ nazywamy różniczkowaniem pierścienia A, jeśli jest ono addytywne i spełnia tożsamość Leibniza. Innymi słowy, jeśli dla dowolnych $a, b \in A$ spełnione są warunki

$$\delta(a+b) = \delta(a) + \delta(b)$$

oraz

$$\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b).$$

Jeśli A jest $\mathbb{F}$-algebrą oraz różniczkowanie $\delta : A \longrightarrow A$ jest odwzorowaniem $\mathbb{F}$-liniowym, to nazywamy je $\mathbb{F}$-różniczkowaniem.

Różniczkowania pierścieni i algebr

Szczególnym typem różniczkowań są różniczkowania wewnętrzne.

Definicja

Niech A będzie pierścieniem. Różniczkowanie $\delta : A \longrightarrow A$ nazywamy różniczkowaniem wewnętrzym, jeśli istnieje taki element $a \in A$, że

$$\delta(x) = [a, x]$$

dla każdego $x \in A$, przy czym wyrażenie $[a, x] := ax - xa$ nazywamy komutatorem elementów a i x. W tym przypadku różniczkowanie δ oznaczamy symbolem ∂_a.

Zastosowania różniczkowań

Przykładowymi obszarami zastosowań różniczkowań są

- geometria różniczkowa i geometria algebraiczna (definicja wektorów stycznych),

Zastosowania różniczkowań

Przykładowymi obszarami zastosowań różniczkowań są

- geometria różniczkowa i geometria algebraiczna (definicja wektorów stycznych),
- teoria algebr Liego (badanie algebr Liego przez różniczkowania),

Zastosowania różniczkowań

Przykładowymi obszarami zastosowań różniczkowań są

- geometria różniczkowa i geometria algebraiczna (definicja wektorów stycznych),
- teoria algebr Liego (badanie algebr Liego przez różniczkowania),
- różniczkowa teoria Galois (badanie rozwiązalności równań różniczkowych),

Zastosowania różniczkowań

Przykładowymi obszarami zastosowań różniczkowań są

- geometria różniczkowa i geometria algebraiczna (definicja wektorów stycznych),
- teoria algebr Liego (badanie algebr Liego przez różniczkowania),
- różniczkowa teoria Galois (badanie rozwiązalności równań różniczkowych),
- kryteria przemienności pierścieni (jeżeli różniczkowanie danego pierścienia spełnia pewien warunek, to pierścień ten jest przemienny).

Gwóźdź programu

Twierdzenie

Każde $\mathbb{F}$-różniczkowanie skończenie wymiarowej prostej $\mathbb{F}$-algebry centralnej jest różniczkowaniem wewnętrznym.

Gwóźdź programu

Twierdzenie

Każde $\mathbb{F}$-różniczkowanie skończenie wymiarowej prostej $\mathbb{F}$-algebry centralnej jest różniczkowaniem wewnętrznym.

W dowodzie powyższego twierdzenia potrzebny nam będzie następujący fakt.

Twierdzenie

Jeśli A jest skończenie wymiarową prostą $\mathbb{F}$-algebrą centralną, to $\mathrm{M}_n(A)$ również jest skończenie wymiarową prostą $\mathbb{F}$-algebrą centralną.

Dowód

Niech $\delta : A \longrightarrow A$ będzie $\mathbb{F}$-różniczkowaniem $\mathbb{F}$-algebry A. Zdefiniujmy odwzorowanie $f : A \longrightarrow \mathrm{M}_2(A)$ wzorem

$$f(a) = \begin{bmatrix} a & \delta(a) \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

dla każdego $a \in A$.

Dowód

Niech $\delta : A \longrightarrow A$ będzie $\mathbb{F}$-różniczkowaniem $\mathbb{F}$-algebry A. Zdefiniujmy odwzorowanie $f : A \longrightarrow \mathrm{M}_2(A)$ wzorem

$$f(a) = \begin{bmatrix} a & \delta(a) \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

dla każdego $a \in A$. Odwzorowanie f jest $\mathbb{F}$-liniowe oraz przeprowadza jedynkę algebry A na macierz jednostkową. Ponadto, dla dowolnych $a, a' \in A$ zachodzi równość

$$f(a)f(a') = \begin{bmatrix} aa' & \delta(a)a' + a\delta(a') \\ 0 & aa' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa' & \delta(aa') \\ 0 & aa' \end{bmatrix} = f(aa').$$

Wynika stąd, że f jest homomorfizmem skończenie wymiarowych prostych $\mathbb{F}$-algebr centralnych.

Dowód

W konsekwencji, z twierdzenia Skolema–Noether wynika, że istnieje macierz odwracalna $U \in \mathrm{M}_2(A)$ taka, że

$$f(a) = U \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} U^{-1}$$

dla każdego $a \in A$.

Dowód

W konsekwencji, z twierdzenia Skolema–Noether wynika, że istnieje macierz odwracalna $U \in \mathrm{M}_2(A)$ taka, że

$$f(a) = U \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} U^{-1}$$

dla każdego $a \in A$. Skoro $U \in \mathrm{M}_2(A)$, to istnieją elementy $x, y, z, t \in A$ takie, że $U = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$.

Dowód

W konsekwencji, z twierdzenia Skolema–Noether wynika, że istnieje macierz odwracalna $U \in \mathrm{M}_2(A)$ taka, że

$$f(a) = U \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} U^{-1}$$

dla każdego $a \in A$. Skoro $U \in \mathrm{M}_2(A)$, to istnieją elementy $x, y, z, t \in A$ takie, że $U = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$.
Otrzymana wcześniej tożsamość jest równoważna równaniu $f(a)U = Ua$. Jest ono następującej postaci

$$\begin{bmatrix} a & \delta(a) \\ 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} a.$$

Dowód

Równanie to jest równoważne układowi równań

$$\begin{cases} ax + \delta(a)z = xa \\ ay + \delta(a)t = ya \\ az = za \\ at = ta \end{cases} \tag{1}$$

Ponieważ równania powyższego układu są spełnione dla dowolnego $a \in A$, z dwóch ostatnich równań otrzymujemy, że $z, t \in \mathrm{Z}(A) = \mathbb{F}$.

Dowód

Równanie to jest równoważne układowi równań

$$\begin{cases} ax + \delta(a)z = xa \\ ay + \delta(a)t = ya \\ az = za \\ at = ta \end{cases} \tag{1}$$

Ponieważ równania powyższego układu są spełnione dla dowolnego $a \in A$, z dwóch ostatnich równań otrzymujemy, że $z, t \in \mathrm{Z}(A) = \mathbb{F}$. Zauważmy, że nie może zachodzić równość $z = t = 0$, gdyż macierz U nie byłaby wtedy odwracalna. A zatem z lub t musi być elementem odwracalnym, ponieważ jest niezerowym elementem ciała $\mathbb{F}$.

Dowód

Bez straty ogólności załóżmy, że z jest odwracalny. Z pierwszego równania w układzie (1) oraz tego, że $z^{-1} \in \mathrm{Z}(A)$, otrzymujemy, że

$$\delta(a) = (xz^{-1})a - a(xz^{-1})$$

dla każdego $a \in A$, a zatem δ jest różniczkowaniem wewnętrznym.

Bibliografia

- G. Berhuy, F. Oggier, An Introduction to Central Simple Algebras and Their Applications to Wireless Communication, American Mathematical Society, 2013.
- I. N. Herstein, A note on derivations, Canad. Math. Bull. 21: 369–370 (1978).
- Y. Sharifi, Derivations of central simple algebras (https://ysharifi.wordpress.com/2011/02/02/derivations-of-central-simple-algebras/).